HVILKA FUNKTIONER ÄRO REPRESENTABLA?

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS

I UPSALA

MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR

ERHÅLLANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD

TILL

OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

GÖSTA SETTERBERG

FILOSOFIE LICENTIAT AF STOCKHOLMS NATION

Å LÄROSALEN N:o IV

LÖRDAGEN DEN 22 SEPT. 1900 KL. 10 F. M.

UPSALA 1900,

UPSALA NYA TIDN:S AKTIEBOLAGS TRYCKERI.

HVILKA FUNKTIONER ÄRO REPRESENTABLA?

11555.

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS

I UPSALA

MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR

ERHÅLLANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD

TILL

OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

GÖSTA SETTERBERG

FILOSOFIE LICENTIAT AF STOCKHOLMS NATION

Å LÄROSALEN N:o IV

LÖRDAGEN DEN 22 SEPT. 1900 KL. 10 F. M.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

UPSALA 1900,

UPSALA NYA TIDN:S AKTIEBOLAGS TRYCKERI.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548928_0121

Förberedande satser.

1. Hvilka diskontinuerliga funktioner kunna framställas som gränsvärden till kontinuerliga funktioner?

Denna fråga behandlar R. Baire i sin doktorsafhandling *"Sur les fonctions de variables réelles"*. Han begränsar sig till funktioner af *en* variabel och härleder för dessa ett på samma gång nödvändigt och tillräckligt villkor. Beviset för att villkoret är nödvändigt låter omedelbart generalisera sig till funktioner af flere variabler. Detta gäller däremot ej, såsom Baire själf påpekar, hans metod att ådagalägga, att villkoret är tillräckligt. För att denna metod skall kunna tillämpas, behöfvas ett par punktmängdsteoretiska satser, hvilka vi lyckats framställa och i det följande (§§ 3, 11) skola bevisa. Först skola vi emellertid i § 2 anföra några satser, för hvilkas härledande vi hänvisa t. ex. till Cantor, hvilkens viktigaste undersökningar finnas sammanförda i *Acta Mathematica*, band 2.

2. Är P en punktmängd i n dimensioner, så finnes ett sådant minsta tal α, tillhörande första eller andra talklassen, att P:s α:te derivata P^{α} uppfyller likheten

$$P^{\alpha} = P^{\alpha+1} = P^{\alpha+2} = \ldots$$

Denna punktmängd P^{α}, som Cantor benämner P^{Ω}, är perfekt, såvida den icke försvinner. Det senare inträffar,

om första derivatan P' består af ett denombrabelt antal punkter, det förra däremot, om P' är af kontinuets mäktighet [1]).

Är P en sluten punktmängd, d. v. s. innehåller den sina gränspunkter, så består

$$P - P'$$

blott af isolerade punkter. Detsamma gäller äfven för hvarje

$$P^{\alpha'} - P^{\alpha'+1} \qquad (\alpha' < \alpha).$$

Vidare gäller, om punktmängden P fortfarande antages sluten, identiteten

$$P = \sum_{\alpha' < \alpha} [P^{\alpha'} - P^{\alpha'+1}] + P^{\Omega}.$$

3. *Om P är en godtycklig sluten, ingenstädes tät punktmängd inom ett n-dimensionalt område E, så kunna vi finna ett denombrabelt antal n-dimensionala kuber så beskaffade, att sammanfattningen af dem jämte gränspunkter utgör E, att hvarje punkt af $E - P$ tillhör någon kub och att det inre af hvarje kub tillhör $E - P$.*

Bevis. E kan inneslutas i en n-dimensional kub C_0 (som kan vara hela det oändliga n-dimensionala rum, hvari E finnes). Denna kub indela vi i ett (ändligt eller oändligt) antal sins emellan lika kuber. Låt C_1 vara sammanfattningen af de kuber, som i sitt inre endast innehålla punkter ur $E - P$. Hvarje kub i $C_0 - C_1$, som ej faller utom och ej heller blott gränsar till E, dela vi åter i lika stora kuber. C_2 må vara sammanfattningen af dem af de sist erhållna kuberna, som i sitt inre blott

[1]) P' kan för öfrigt ej hafva någon mäktighet mellan dessa båda. Jfr Bendixson, Sur la puissance des ensembles parfaits de points. Bih. Sv. Vet.-Akad:s handl., bd 9, n:o 6.

innehålla punkter ur $E - P$. Analogt bilda vi C_3 ur $C_0 - C_1 - C_2$ o. s. v. Sätta vi

$$C = \sum C_\nu,$$

så är området C uppdeladt i kuber.

Innan vi visa, att C jämte gränspunkter sammanfaller med E, skola vi ådagalägga, att C på sin höjd består af ett denombrabelt oändligt antal kuber. För den skull tänka vi oss en godtycklig serie mot noll gående volymer $V_1, V_2, \ldots V_\nu \ldots$ Är kuben C_0 ändlig, kan den ej rymma huru många kuber som helst, som äro större än V_1, utan dessa måste förekomma till ett ändligt antal. Dessa numrera vi med 1, 2, ... Likaså finnes blott ett ändligt antal kuber, hvilkas volym ligger mellan V_1 och V_2. På dem fortsätta vi numreringen. Sedan komma vi till dem mellan V_2 och V_3 o. s. v. Emedan V_ν går mot noll med växande ν, är hvarje kub större än något visst V_ν och får således ett ändligt nummer. Deras antal är följaktligen denombrabelt. — Är C_0 oändligt, så kunna vi konstruera ett denombrabelt oändligt antal ändliga volymer $C^{(\nu)}$ med C_0 till gränsvärde, t. ex. koncentriska kuber, hvilkas sidor gå mot oändligheten. Inom hvarje $C^{(\nu)} - C^{(\nu-1)}$ är tydligen kubernas antal denombrabelt. Som ett denombrabelt antal denombrabla summor själf är denombrabelt, består äfven i detta fall C af ett denombrabelt antal kuber. Vi kunna således sätta

$$C = \sum c_\mu.$$

Nu skola vi visa, att hvarje punkt af $E - P$ tillhör det inre eller begränsningen af någon kub c_μ. P är en sluten punktmängd, d. v. s. innehåller sina gränspunkter. En godtycklig punkt A af $E - P$ kan följaktligen ej vara gränspunkt till P, utan måste befinna sig

på ett visst afstånd ϱ därifrån. Emedan uppdelningen i kuber kan fortgå obegränsadt och kuberna vid hvarje ny delning få sidorna på sin höjd hälften så stora, måste sidornas storlek vid upprepad delning gå mot noll. Således förekommer, om så behöfves, någon delning, hvarvid sidan blir $\leqq \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ och diagonalen $\leqq \varrho$. Hör ej punkten A redan förut till någon kub c_μ, så måste den nu komma att tillhöra en så liten kub, att den ej når bortom någon del af P, d. v. s. en kub c_μ. Således tillhör hvarje punkt ur $E-P$ någon kub. Att det i det inre af en kub blott finnes punkter ur $E-P$, följer af kubernas bildningslag.

Nu återstår endast att uppvisa, att C jämte gränspunkter eller, som C är en tät punktmängd, C' sammanfaller med E. Emedan punktmängden P ingenstädes är tät, är en godtycklig punkt A ur P gränspunkt till $E-P$, d. v. s. det finnes oändligt många punkter ur $E-P$ inom hvarje omgifning till A. Som punkten A ej kan falla i det inre af någon kub, måste den antingen ligga på begränsningen af en viss kub eller utanför hvarje kub. I förra fallet tillhör den tydligen C'. I senare fallet befinner sig visserligen hvarje kub på ändligt afstånd därifrån; men det finnes punkter ur $E-P$ och följaktligen kuber huru nära som helst intill A, som således är gränspunkt till kuber, d. v. s. tillhör C'. Alltså hör hela P och följaktligen hela E till C'.

C' utgöres af ett system kuber C jämte deras gränspunkter. C tillhör E, således äro C:s gränspunkter äfven gränspunkter till E. Som E är en sluten punktmängd, innefattar den dessa gränspunkter, d. v. s. C' tillhör E. Följaktligen är

$$C' = E.$$

Härmed är satsen bevisad.

Det kan inträffa, att en punkt, som ligger på begränsningen af en kub, på samma gång är gränspunkt till andra kuber. Vi kunna således tala om en punkt, som *åt ett visst håll är gränspunkt till kuber*. En sådan punkt måste tillhöra P. Ty som P är en sluten punktmängd, skulle det i annat fall finnas ett visst ändligt afstånd till närmaste punkt af P. Men då skulle i hvarje riktning en ändlig kub nå fram till punkten, som i så fall åt intet håll kunde vara gränspunkt till kuber.

4. Låt oss hafva ett system punktmängder

$$P_1, P_2, \ldots, P_\omega, \ldots, P_\alpha, \ldots,$$

d. v. s. en punktmängd svarande mot hvarje tal af *1:a* eller *2:a* talklassen. Om dessa punktmängder göra vi följande antaganden:

1. Hvar och en af dem är sluten.

2. För $\alpha' > \alpha$ är $P_{\alpha'} \leqq P_\alpha$ [1]).

3. De punkter, som i en punktmängd äro isolerade, försvinna ur den följande.

Vi skola nu bevisa, att *det finnes ett sådant α, tillhörande 1:a eller 2:a talklassen, att vi hafva*

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = P_{\alpha+2} = \ldots,$$

samt att denna punktmängd P_α, om den är skild från noll, är perfekt.

När α växer, kunna ju blott punkter falla bort, men inga nya komma till. Härvid äro två fall tänkbara. — Antingen finnes ett α, för hvilket vi hafva

$$P_\alpha = 0.$$

I detta fall är satsen tydligen sann. — Eller också finnes intet sådant α. Låt E vara ett kontinuum, som omsluter P. Vi uppdela E i ett ändligt antal delområden.

[1]) En punktmängd P säges vara mindre än en annan Q, om hvarje punkt ur P tillhör Q, men ej alla punkter ur Q tillhöra P.

Åtminstone ett af dessa måste vara så beskaffadt, att intet α finnes, för hvilket P_α saknar punkter därinom och på dess begränsning; ty i annat fall försvunne P_α för det största af de α, som svara mot de olika delområdena. Vi utvälja ett område, som innehåller punkter ur hvarje P_α, uppdela detta i nya delområden, utvälja af dessa ett med samma egenskap som nyss, uppdela detta ånyo o. s. v. Genom att så fortsätta i oändlighet komma vi slutligen till en så beskaffad gränspunkt (som kan vara oändligt aflägsen), att det i hvarje omgifning därtill finnes punkter ur hvarje godtyckligt P_α. Emedan samtliga punktmängder äro slutna, tillhör äfven denna gränspunkt hvarje P_α. Sammanfattningen af de punkter, som tillhöra hvarje P_α, benämna vi P_Ω.

Vi skola först visa, att P_Ω är en perfekt punktmängd. I närheten af en godtycklig gränspunkt till P_Ω finnas punkter tillhörande hvarje P_α, d. v. s. punkten är gränspunkt till hvarje P_α. Som hvarje punktmängd P_α är sluten, tillhör således ifrågavarande punkt hvarje P_α och följaktligen P_Ω. P_Ω är alltså en sluten punktmängd. — Nu skola vi se, att denna punktmängd äfven är tät i sig. Antag nämligen, att A vore en isolerad punkt ur P_Ω. Vi omgifva A med ett område D, som ej innesluter någon annan punkt ur P_Ω. I dess inre lägga vi en serie områden $D_1, D_2, \ldots D_\nu, \ldots$, hvarje följande inom det föregående och så beskaffade, att de för $\nu = \infty$ hafva A till gränsvärde. Inom och på begränsningen af ett godtyckligt $D - D_\nu$ finnes ingen punkt, som tillhör P_Ω. Mot ett dylikt område svarar ett så beskaffadt α_ν, att P_{α_ν} saknar punkter inom $D - D_\nu$, ty i annat fall skulle liksom nyss kunna visas, att någon punkt inom $D - D_\nu$ tillhörde P_Ω. Dessa olika α_ν måste enligt Cantors definition hafva ett gränsvärde α, för hvilket P_α tydligen ej innehåller någon annan punkt än A inom D. A är således en isolerad punkt i P_α och försvinner enligt

vårt antagande ur P_{a+1}, följaktligen ur P_Ω. Punktmängden P_Ω kan alltså ej innehålla isolerade punkter, utan är tät i sig och, som vi nyss visat, sluten, d. v. s. perfekt.

Vi bestämma nu en serie aftagande positiva storheter $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu, \ldots$, som gå mot noll med växande ν. Låt E_ν vara sammanfattningen af de punkter af E, som åtminstone falla på afståndet ϱ_ν från P_Ω. I likhet med nyss visas, att det mot hvarje ν svarar ett sådant a_ν, att P_{a_ν} saknar punkter inom E_ν och att gränsvärdet a af a_ν är så beskaffadt, att P_a saknar punkter utanför P_Ω. Följaktligen är

$$P_a = P_{a+1} = \ldots = P_\Omega.$$

Funktioners allmänna egenskaper.

5. Begreppet funktion tages här i sin vidsträcktaste bemärkelse. Låt oss hafva n stycken storheter $x_1, \ldots x_n$, af hvilka hvar och en (oberoende eller beroende af de öfrigas värden) kan antaga vissa värden. (Härvid få vi en viss punktmängd och som specialfall ett kontinuum.) Om det mot hvarje gifven punkt eller värdekombination af $x_1, \ldots x_n$ svarar ett visst eller flera värden på z, så säges z vara en *funktion* af variablerna $x_1, \ldots x_n$, definierad i de gifna punkterna. Denna definition härrör från Dirichlet. Vi skola i det följande endast sysselsätta oss med reella funktioner af reella variabler.

En funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ benämnes *kontinuerlig*, om det för hvarje punkt $(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$ svarar ett sådant positivt δ mot hvarje godtyckligt litet ε, att vi för

$$|x_\nu - x_\nu^{(0)}| < \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

dels hafva

(1) $$f(x_1, \ldots x_n) < f(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}) + \varepsilon,$$

dels

(2) $$f(x_1, \ldots x_n) > f(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}) - \varepsilon.$$

Är blott villkoret (1) eller blott (2) uppfylldt, säges funktionen vara *halfkontinuerlig*, i förra fallet *kontinuerlig uppåt*, i det senare *kontinuerlig nedåt*.

Vare sig blott ettdera eller intetdera villkoret är uppfylldt, kallas funktionen *diskontinuerlig*. En diskontinuerlig funktion af n variabler är t. ex. den funktion, som antager värdet *1* i de punkter, där alla x_ν äro rationella, men i hvarje annan punkt är *noll*. Ett annat exempel är den funktion $f(x_1, \ldots x_n)$, som försvinner i de punkter, där ej alla x_ν äro rationella, men i hvarje rationell punkt $x_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ antager värdet $\frac{1}{q}$, då q är det största af de värden, något q_ν efter vederbörlig förkortning erhåller.

Emedan så väl rationella som irrationella punkter ligga oändligt tätt, är det för den förra funktionen i fråga om hvarje punkt omöjligt att finna ett sadant δ, att villkoren (1) och (2) samtidigt äro uppfyllda för $\varepsilon < 1$. Funktionen är således diskontinuerlig i hvarje punkt och benämnes för den skull *totalt diskontinuerlig*. Den senare funktionen åter är diskontinuerlig blott i de rationella punkterna, men kontinuerlig i hvarje punkt A, där nagot x_ν är irrationellt och således

$$f(A) = 0.$$

Låt oss nämligen fixera ett visst ε. Som de rationella tal, hvilkas nämnare ligga under en viss gräns, ej kunna förekomma oändligt tätt, kunna ej de punkter, där vi hafva

$$f = \frac{1}{q} > \varepsilon,$$

åt något håll ligga hur nära som helst intill A. Det finnes således en omgifning till A, inom hvilken funktionen i ingen punkt öfverstiger ε. Som funktionen aldrig understiger värdet noll, är den tydligen kontinuerlig i en sådan punkt som A. En funktion, som blott i vissa punkter är kontinuerlig, säges vara *punktuellt diskontinuerlig.*

Inom det område, där en funktion är gifven, kan en godtycklig punktmängd utväljas. Betraktas funktionen blott på denna punktmängd, så kan man analogt definiera begreppen *kontinuerlig*, *halfkontinuerlig*, *punktuellt* och *totalt diskontinuerlig med afseende på en viss punktmängd.*

6. Låt $M[f, D]$ och $m[f, D]$ beteckna det största, resp. minsta värde, $f(x_1, \ldots x_n)$ antager i någon punkt inom ett område D.

Vi taga nu en godtycklig punkt A_0 inom området för funktionen och omgifva denna punkt med en n-dimensional volym D_1. Innanför D_1 lägga vi en volym D_2, innanför denna D_3 o. s. v., så att hvar och en omsluter A_0. Vi bestämma dessa volymer så, att de till gränsvärde hafva punkten A_0, d. v. s. hvarje annan punkt faller utanför D_ν från och med ett visst ν. (Detta är alltid möjligt. Vi kunna t. ex. välja ett system sfärer, hvilkas radier aftaga mot noll.) Då är tydligen, om vi i stället för $M[f, D_\nu]$ sätta M_ν,

$$M_1 \geqq M_2 \geqq \ldots \geq M_\nu \geqq \ldots$$

M_ν går således mot en viss (ändlig eller oändlig) gräns M, när ν växer. Det är lätt att visa, att det mot hvarje punkt A_0 svarar ett bestämdt M, oberoende af det sätt, hvarpå volymerna D_ν väljas, blott de till gränsvärde hafva A_0. Gränsvärdet till M_ν benämnes *funktionens maximum i punkten* A_0 och tecknas

$$M[f, A_0].$$

Af definitionen på maximet i en punkt följer, att hur litet vi än välja ε, så svarar däremot ett sådant ν', att vi för hvarje $\nu \geqq \nu'$ dels hafva

$$f(x_1, \ldots x_n) < M[f, A_0] + \varepsilon,$$

så snart punkten $(x_1, \ldots x_n)$ faller inom D_ν, dels

$$f(x_1, \ldots x_n) > M[f, A_0] - \varepsilon$$

åtminstone i någon punkt (och följaktligen i oändligt många) inom det D_ν, vi valt.

Som den förra olikheten gäller inom hela $D_{\nu'}$, kunna vi ersätta den med

$$M[f, D_{\nu'}] < M[f, A_0] + \varepsilon.$$

För hvarje punkt A inom $D_{\nu'}$ är tydligen

$$M[f, A] \leqq M[f, D_{\nu'}].$$

Af dessa båda olikheter erhålles

$$M[f, A] < M[f, A_0] + \varepsilon.$$

En funktions maximum är således alltid kontinuerligt uppåt.

Analogt kunna vi definiera en funktions *minimum* $m[f, A]$ i en punkt och visa, att det är *kontinuerligt nedåt.*

7. Skillnaden mellan en funktions maximum och minimum inom ett område (D) eller i en punkt (A) benämnes funktionens oskillation inom området, resp. i punkten, och betecknas

$$\omega[f, D] = M[f, D] - m[f, D],$$

$$\omega[f, A] = M[f, A] - m[f, A].$$

Är ψ kontinuerligt nedåt, så är $-\psi$ kontinuerligt uppåt.

Summan af funktioner, som äro kontinuerliga uppåt, kan lätt visas vara kontinuerlig uppåt.

Med stöd af dessa båda anmärkningar inses, att *en funktions oskillation i en punkt är kontinuerlig uppåt.*

8. Analogt kunna vi definiera en funktions *maximum*, *minimum* och *oskillation med afseende på en viss punktmängd.* Skillnaden blir endast den, att vi blott befatta oss med funktionsvärdena i de gifna punkterna. Analogt visas äfven, att *dessa funktioner äro halfkontinuerliga.*

9. *Om en funktion är kontinuerlig uppåt, så är den punktmängd (P) sluten, där funktionen är större än eller lika med ett godtyckligt tal λ.*

Ty i annat fall hade funktionen ett visst värde

$$\lambda - \eta \qquad (\eta > 0)$$

i någon gränspunkt till P, under det den vore $\geqq \lambda$ i punkter huru nära som helst därintill. Men i så fall kunde den ej satisfiera (1) (§ 5) för $\varepsilon < \eta$, d. v. s. den vore ej kontinuerlig uppåt.

10. *Om en funktion $f(x_1, \ldots x_n)$, definierad på en perfekt punktmängd P* (som kan vara ett kontinuum), *är kontinuerlig uppåt och i hvarje punkt har sitt minimum noll, så finnes det inom hvarje område någon punkt, i hvilken den antager värdet noll.*

Låt nämligen D vara ett område, hvilket som helst, inom P. Bestämma vi en godtycklig serie aftagande positiva tal

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots,$$

som gå mot noll för växande ν, så finnes, emedan minimet inom D är noll, någon punkt A_1 därinom, i hvilken vi hafva

$$f(A_1) < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Som funktionen är kontinuerlig uppåt, är inom en viss omgifning D_1 till A_1

$$f < f(A_1) + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

(n. b. i de punkter, där funktionen är definierad. Och dessa punkter äro oändligt många, emedan punktmängden är perfekt och A_1 således gränspunkt). Inom detta område kan på samma sätt en ny punkt A_2 erhallas med en omgifning D_2, inom hvilken vi hafva

$$f < \varepsilon_2.$$

Så kunna vi fortgå och finna en oändlig serie allt mindre områden D_ν med

$$f < \varepsilon_\nu.$$

Inom hvarje D_ν finnas punkter ur P, hvilket inses som nyss. Punkterna $A_1, A_2, \ldots$ utgöra en oändlig mängd punkter inom ett ändligt område och måste därför hafva åtminstone en gränspunkt A. Denna faller tydligen inom hvarje D_ν. Som P är en sluten punktmängd, hör A till P, och f är definieradt där. Således är

$$f(A) < \varepsilon_\nu,$$

huru stort vi än välja ν, d. v. s.

$$f(A) = 0.$$

11. En punktmängd, belägen i en n-dimensional rymd, säges vara *tät* inom hvarje område, där den utfyller ett n-dimensionalt kontinuum. Enligt denna definition är en rymd af lägre dimensionstal, som ligger i ett n-dimensionalt kontinuum, ingenstädes tät.

Vi skola nu bevisa följande sats:

Om en kontinuerlig funktion är definierad på en sluten, ingenstädes tät punktmängd P, så kunna vi inom ett godtyckligt kontinuum E, inneslutande P, bestämma en kontinuerlig funktion, som på P antager de gifna funktionsvärdena.

Vi skola först visa, att satsen gäller för *en* dimension. Satsen i § 3, tillämpad på en dimension, lär oss, att om P är utsträckt på en linje E, så kan $E - P$ uppdelas i ett denombrabelt antal ändliga intervall. Genom att sammanfoga ett ändligt eller oändligt antal sådana intervall kunna vi få $E - P$ uppdeladt i intervall, hvilkas ändpunkter tillhöra P. (Denna sats kunde för öfrigt direkt erhållas för en dimension. Jfr t. ex. Baire, anf. st. sid. 37—38.) Inom dessa intervall låta vi funktionen variera lineärt mellan de gifna värdena i ändpunkterna. Den så erhållna funktionen är tydligen kontinuerlig inom intervallen. I en punkt $x = x_0$ tillhörande P är den kontinuerlig på P. Finnas i närmaste omgifningen till x_0 åt ena sidan blott punkter ur $E - P$, så är funktionen naturligtvis kontinuerlig åt denna sida. Men åtminstone åt en sida finnas punkter ur P hur nära som helst. Som funktionen är kontinuerlig på P, kan åt en dylik sida ett afstånd $x_0 \ldots x_0 + \delta$ afsättas, inom hvilket oskillationen på P ej öfverstiger ett godtyckligt valdt ε. Låt A vara en punkt, som tillhör $E - P$ och som faller mellan x_0 och $x_0 + \delta$. Enligt sitt bildningssätt antager funktionen i A ett värde, som ligger mellan tvenne funktionsvärden på punkter ur P inom samma intervall. Häraf inses, att oskillationen inom intervallet $x_0 \ldots x_0 + \delta$ ej öfverstiger ε. Funktionen är således kontinuerlig i hvarje punkt af E.

För att visa, att satsen gäller generellt, skola vi antaga, att vi, om P och E på sin höjd äro utsträckta i $(n-1)$ dimensioner, inom hela E kunna bestämma en kontinuerlig funktion, som på P antager de gifna vär-

dena och som dessutom äro underkastade villkoret, att dess absoluta maximum och minimum falla på P. Med stöd häraf skola vi bevisa satsen för n dimensioner.

Enligt § 3 uppdela vi E i ett denombrabelt antal kuber c_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) så, att ingen del af P kommer att falla i deras inre. Vi antaga för enkelhets skull, att detta sker genom upprepad *tudelning* af sidorna på de kuber, hvari vi dela E. Låt A vara en hörnpunkt till något c_μ. Härvid äro två fall tänkbara. — Antingen gränsar ett ändligt antal (högst 2^n) kuber till A. Är ϱ sidan till den minsta af dessa kuber, så måste någon del af P falla inom en kub med A till midtpunkt och sidan 4ϱ. (Ty i annat fall hade ingen kub med A på begränsningen behöft uppdelas så långt, att den fått ϱ till sida.) Vi gifva funktionen i A ett medelvärde mellan maximet och minimet på P inom nyss nämnda kub, såvida ej A tillhör P och funktionen således från början är bestämd där. — Eller också är A åt något håll gränspunkt till kuber. Vore afståndet till P ändligt, så skulle vid en viss delning punkten A äfven åt ifrågavarande håll komma att tillhöra någon kub i stället för att vara gränspunkt till kuber. Således måste A vara gränspunkt till den slutna punktmängden P, d. v. s. A tillhör P. Följaktligen är funktionen gifven i A.

Låt Q vara sammanfattningen af de punkter, där funktionen nu är bestämd, d. v. s. P och hörnpunkterna till de olika c_μ. Vi skola visa, att den på Q definierade funktionen är kontinuerlig. För att kunna tala om kontinuitet i en punkt måste vi hafva funktionen gifven i punkter inom hvarje omgifning därtill, d. v. s. punkten måste vara gränspunkt. En gränspunkt (A) till Q tillhör, som vi nyss sågo, P. Som funktionen är kontinuerlig på P, kunna vi för hvarje ε finna ett sådant δ, att oskillationen på P understiger ε inom en kub (C) med sidan 4δ och A till midtpunkt. Om punkter, som

tillhöra Q, men ej P, d. v. s. hörnpunkter till kuber c_μ, finnas huru nära som helst intill A, så återstår att visa, att vi inom C kunna finna en omgifning till A, inom hvilken oskillationen på Q understiger ε. För att någon del af $P - Q$ skall finnas inom hvarje omgifning till A, måste A åt något håll vara gränspunkt till kuber. Åt ett sådant håll kunna ej oändligt många kuber med sidan större än $\frac{\delta}{2}$ förekomma, utan den närmaste af dem måste ligga på ett ändligt afstånd δ' från A. Nu upprita vi en med C koncentrisk så liten kub C', att hvarken dess diagonal öfverstiger $2\,\delta'$ eller dess sida $2\,\delta$. En godtycklig punkt (A') ur $Q - P$ inom C' måste då vara hörnpunkt till en kub med sidan mindre än $\frac{\delta}{2}$, och funktionsvärdet i punkten är ett medelvärde mellan maximet och minimet inom en kub med sidan $2\,\delta$. Som midtpunkten (A') till denna kub ligger inom C', kan ingen del däraf nå fram till begränsningen af C. Följaktligen ligger funktionsvärdet i A' mellan maximet och minimet inom C. Emedan A' valdes godtyckligt, gäller detta för hvarje punkt inom C', d. v. s. oskillationen på Q inom C' understiger ε. Funktionen är således kontinuerlig på Q.

Nu skola vi bestämma funktionen på begränsningarne till kuberna c_μ. På en viss kantlinje till en kub falla ett denombrabelt antal hörnpunkter till andra kuber. På hvarje intervall mellan tvänne sådana punkter bestämma vi funktionen så, att den på Q antager sitt största och sitt minsta värde. Så fortsätta vi med öfriga kantlinjer, till dess vi på kanterna till hvarje kub erhålla en funktion, som på Q antager sitt största och sitt minsta värde. — Sedan komma vi till kubernas tvådimensionala sidor. Hvarje sådan kan stöta till ett denombrabelt antal kuber. Därigenom indelas den i delkvadrater, på hvilkas begränsningar vi bestämt funk-

tionen. De punkter, som ej tillhöra någon delkvadrat, måste, som lätt inses, tillhöra P, och funktionen är således definierad i dem. På hvar och en af dessa kvadrater bilda vi en funktion, som antager sitt maximum och sitt minimum på Q eller på begränsningen. Men funktionen är redan bestämd på så sätt på begränsningen, att maximum och minimum äfven där falla på Q, hvadan maximet och minimet i hvarje fall komma på Q. — Så gå vi till de tredimensionala begränsningarne o. s. v. och fortsätta, tills vi få funktionen bestämd på begränsningen till hvarje c_μ så, att dess största och minsta värden ständigt falla på Q.

Därefter låta vi funktionen i midtpunkten till hvarje kub antaga ett värde mellan maximet och minimet på begränsningen samt variera lineärt mellan midtpunkten och hvarje punkt på begränsningen längs deras sammanbindningslinje. Härmed är funktionen bestämd för hela E.

Den så erhållna funktionen uppnår tydligen sitt största och sitt minsta värde på Q, således på P. Att den är kontinuerlig i det inre af hvarje kub, inses lätt. Likaså att den i en punkt på begränsningen är kontinuerlig inåt hvarje kub. Således återstår blott att visa, att den är kontinuerlig i en gränspunkt till kuber. Nyss sågo vi, att en sådan punkt kan omgifvas med ett område, inom hvilket oskillationen på Q understiger ett godtyckligt litet ε. Vi kunna lätt välja detta område så, att det begränsas af $(n-1)$-dimensionala rymder, som samtidigt utgöra sidor till kuber jämte gränspunkter, hvilka tillhöra P. I så fall ligga funktionens maximi- och minimivärden inom området på Q, och oskillationen på E inom området understiger följaktligen ε. Funktionen är således kontinuerlig äfven i en punkt, som åt något håll utgör gränspunkt till kuber, alltså i hvarje punkt.

Metod för frågans lösning.

12. Ett exempel på en diskontinuerlig funktion såsom gränsvärde till kontinuerliga funktioner erhålles, om en funktion utvecklas i *Fouriers* serie,

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x).$$

Sätta vi nämligen

$$(2) \qquad f_m(x) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x),$$

så är hvarje $f_m(x)$ en kontinuerlig funktion och

$$(3) \qquad f(x) = \lim_{m=\infty} f_m(x)$$

för $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Men funktionen $f(x)$ själf är i allmänhet ej kontinuerlig. För gränsvärdena 0 och 2π är nämligen

$$\lim_{x=0} f(x) = \frac{1}{2}[f(0) + f(2\pi)],$$

$$\lim_{x=2\pi} f(x) = \frac{1}{2}[f(0) + f(2\pi)].$$

Så snart $f(0)$ och $f(2\pi)$ äro olika, äro således $x = 0$ och $x = 2\pi$ diskontinuitetspunkter.

13. Vi funno nyss en *diskontinuerlig funktion $f(x)$, som kunde framställas som gränsvärde till en serie kontinuerliga funktioner $f_m(x)$.* Nu ställer sig frågan: *Hvilka diskontinuerliga funktioner hafva denna egenskap?*

Låt $y_1, y_2, \ldots y_m, \ldots$ vara en följd aftagande positiva värden, som gå mot noll med växande m. Vi definiera en funktion $\varphi(x, y)$ inom parallelogrammen

$$0 \leqq x \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq y \leqq y_1$$

på följande sätt. På hvarje linje $y = y_m$ sätta vi

$$\varphi(x, y_m) = f_m(x), \tag{1}$$

där f_m är detsamma som i föregående paragraf. Mellan $y = y_m$ och $y = y_{m-1}$ låta vi $\varphi(x, y)$ variera lineärt med afseende på y, d. v. s.

$$\varphi(x, y) = \frac{y - y_m}{y_{m-1} - y_m} f_{m-1}(x) + \frac{y_{m-1} - y}{y_{m-1} - y_m} f_m(x). \tag{2}$$

Slutligen göra vi

$$\varphi(x, 0) = f(x). \tag{3}$$

Nu inses lätt, att $\varphi(x, y)$ är kontinuerligt inom hvarje parallelogram

$$0 \leqq x \leqq 2\pi, \quad y_m \leqq y \leqq y_{m-1}$$

liksom på begränsningen mellan tvenne dylika parallelogrammer. Funktionen är således kontinuerlig med afseende på (x, y) i hvarje punkt inom sitt område utom på X-axeln, där den i vissa punkter ($x = 0$ och $x = 2\pi$) är diskontinuerlig. På hela denna axel är den likväl kontinuerlig med afseende på y enbart. Ty på hvarje linje $x = x' =$ konstant kunna vi i skärningspunkterna till en linje $y = y_m$ få $\varphi(x', y)$ huru nära vi vilja till $f(x')$, blott vi välja m tillräckligt stort. Och i punkter mellan y_m och y_{m+1} ligger, som (2) visar, $\varphi(x', y)$ mellan $\varphi(x', y_m)$ och $\varphi(x', y_{m+1})$. Följaktligen närmar sig $\varphi(x', y)$ till $\varphi(x', 0)$ äfven i dessa mellanliggande punkter.

14. Vi hafva således framställt en sådan funktion $\varphi(x, y)$ af två variabler, att den på X-axeln antager samma värden som en gifven diskontinuerlig funktion $f(x)$, på samma axel är kontinuerlig med afseende på y

och i sina öfriga punkter är kontinuerlig med afseende på (x, y), således äfven med afseende på x [1]). På samma sätt kunna vi för *hvarje* diskontinuerlig funktion $f(x)$, som kan framställas som gränsvärde till en serie kontinuerliga funktioner $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., finna en funktion $\varphi(x, y)$ af nyss angifna beskaffenhet. Omvändt: hafva vi funnit en sådan funktion $\varphi(x, y)$, svarande mot ett gifvet $f(x)$, så kan tydligen $f(x)$ framställas som gränsvärde till en serie kontinuerliga funktioner. Med stöd af denna sats, som omedelbart kan utvidgas till funktioner af flera variabler, kunna vi uttala ofvanstående fråga (§ 13) sålunda:

Huru bör en diskontinuerlig funktion af n variabler $f(x_1, \ldots x_n)$ vara beskaffad, för att det skall finnas någon funktion $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$ med följande egenskaper? Den är definierad för $z \geqq 0$ inom samma område i $(x_1, \ldots x_n)$ som f, kontinuerlig för $z > 0$ samt kontinuerlig med afseende på z i hvarje punkt, där vi hafva $z = 0$. Vidare är

$$\varphi(x_1, \ldots x_n, 0) = f(x_1, \ldots x_n).$$

Finnes någon sådan funktion $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$, så säges $f(x_1, \ldots x_n)$ vara en *representabel* funktion.

---

[1]) Här kan vara skäl att påpeka, att en funktion, som är kontinuerlig med afseende på x för sig och y för sig, därför ej nödvändigt är kontinuerlig med afseende på begge variablerna samtidigt. Ett exempel härpå lämnar den funktion, som är *noll* i origo och i hvarje annan punkt antager värdet

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Den är t. ex. $\frac{1}{2}$ i hvarje punkt på linien $x = y$ huru nära som helst intill origo, där den plötsligt springer öfver till 0. Den är således diskontinuerlig i origo, ehuru den är kontinuerlig både utefter X- och Y-axeln.

Frågan blir således: *Hvilka diskontinuerliga funktioner äro representabla?*

Vi skola finna, att det nödvändiga och tillräckliga villkoret härför är, att funktionen är *punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd.*

Nödvändiga villkor.

15. Låt $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$ vara en funktion, definierad för $z \geqq 0$ inom ett visst område i $(x_1, \ldots x_n)$. Vi skola om denna funktion göra ett allmännare antagande, än blott och bart att den representerar

$$f(x_1, \ldots x_n) = \varphi(x_1, \ldots x_n, 0).$$

Det är nämligen tillräckligt att förutsätta, dels att den i hvarje punkt är kontinuerlig med afseende på z, dels att det mellan tvenne godtyckliga plana n-dimensionala rymder $z = z_1$ och $z = z_2$ alltid finnes en med dem parallell rymd, på hvilken funktionen är kontinuerlig med afseende på $(x_1, \ldots x_n)$.

Kan det visas, att funktionen $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$ är punktuellt diskontinuerlig på hvarje perfekt punktmängd (utsträckt i $(n+1)$ dimensioner eller färre), *så gäller detta tydligen äfven om $f(x_1, \ldots x_n)$.*

16. Är A en godtycklig punkt inom området för φ, så kunna vi åt hvardera sidan afsätta en viss längd ϱ parallellt med Z-axeln. Låt $\sigma(\varrho)$ vara oskillationen af φ på denna linje af längden 2ϱ. Som funktionen är kontinuerlig med afseende på z, är

$$\sigma(0) = 0,$$

och $\sigma(\varrho)$ är kontinuerligt med afseende på ϱ samt aftager aldrig med växande ϱ. Låt a_n vara *det största värde på* ϱ,

som svarar mot en oskillation σ. Mot hvarje positivt σ svarar då ett a_σ, som aldrig minskas, när σ växer.

Vi skola nu visa, att *denna funktion* a_σ *är kontinuerlig uppåt*, d. v. s. att vi hafva

$$(1) \qquad a_\sigma(x_1, \ldots x_n, z) < a_\sigma(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, z_0) + \varepsilon$$

för ett godtyckligt ε, blott punkten $A = (x_1, \ldots x_n, z)$ faller inom en tillräckligt liten omgifning till $A_0 = (x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, z_0)$.

Afsätt nämligen från punkten A_0 (Fig. 1) ett afstånd $A_0 B_0 = A_0 C_0 = a_\sigma + \frac{\varepsilon}{2}$ åt hvardera sidan parallellt med

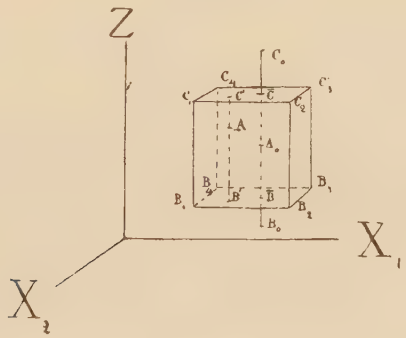

Fig. 1.

Z-axeln. Enligt definitionen på a_σ är oskillationen på $B_0 C_0$ större än σ, d. v. s. det finnes alltid på linjen $B_0 C_0$ ett par punkter $\overline{B}$ och $\overline{C}$ så beskaffade, att vi för dem hafva

$$|\varphi(\overline{C}) - \varphi(\overline{B})| > \sigma.$$

Det finnes således ett visst positivt η, som ger

$$|\varphi(\overline{C}) - \varphi(\overline{B})| = \sigma + \eta.$$

φ varierar kontinuerligt längs $B_0 C_0$. Däraf inses lätt, att om vi välja ett η' mellan 0 och η och ersätta $\overline{B}$ och $\overline{C}$

med tillräckligt närbelägna punkter B och C på $B_0 C_0$, så är fortfarande

$$|\varphi(C) - \varphi(B)| > \sigma + \eta'. \tag{2}$$

På grund af vårt antagande om φ:s kontinuitet kunna B och C väljas så, att φ blir kontinuerligt med afseende på $(x_1, \ldots x_n)$ i de mot Z-axeln vinkelräta n-dimensionala plana rymder, som gå genom B och C. Det finnes således i hvardera af dessa båda plana rymder en omgifning till B, resp. C, inom hvilken vi för hvarje punkt B', resp. C' hafva

$$|\varphi(B') - \varphi(B)| \leqq \frac{\eta'}{2}, \tag{3}$$

$$|\varphi(C') - \varphi(C)| \leqq \frac{\eta'}{2}. \tag{4}$$

Dessa båda omgifningar ($B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ och $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$) kunna väljas symmetriskt, d. v. s. så att den ena vid förskjutning parallellt med Z-axeln öfvergår i den andra. När detta skett, kunna B' och C'' alltid tagas på samma med Z-axeln parallella linje. Vi lägga en med $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ och $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ parallell och symmetrisk rymd $A_1\ A_2 A_3\ A_4$ (ej utritad) genom A_0 samt draga från hvarje punkt på $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ en perpendikel af längden $\frac{\varepsilon}{2}$ åt hvardera sidan.

Vi skola nu visa, att olikheten (1) gäller för hvarje punkt A inom den $(n+1)$-dimensionala volym V, som utgöres af sammanfattningen af dessa perpendiklar.

Olikheterna (2)—(4) gifva för hvarje punktpar B' och C''

$$|\varphi(C') - \varphi(B')| > \sigma.$$

Vi afsätta från någon punkt A inom V längden $a_\sigma + \varepsilon$ parallellt med Z-axeln åt hvartdera hållet. Som vi gjort $A_0 B$ och $A_0 C \leqq a_\sigma + \frac{\varepsilon}{2}$, måste tydligen denna linje träffa

$B_1 B_2 B_3 B_1$ och $C_1 C_2 C_3 C_1$ i punkter B' och C'. I följd af nyss härledda olikhet inses således, att $a_\sigma + \varepsilon$ är större än $a_\sigma(A)$, d. v. s. olikheten (1) gäller för hvarje punkt inom cylindern.

17. *Om vi betrakta a_σ blott i de punkter, som tillhöra en viss kontinuerlig rymd*

$$z = \chi(x_1, \ldots x_n), \tag{1}$$

och minimet af a_σ i någon punkt A_0 på denna är större än noll, så är i denna punkt

$$\omega \leqq 2\sigma, \tag{2}$$

då ω betecknar oskillationen i A_0 med afseende på alla variablerna.

Bevis. Är γ mindre än minimet af a_σ i $A_0 = (x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, z_0)$ med afseende på rymden (1), så kan A_0 omgifvas med en så liten omgifning i den plana rymden $z = z_0$, att vi i hvarje punkt därinom dels hafva

$$|\chi(x_1, \ldots x_n) - \chi(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})| < \frac{\gamma}{2}, \tag{3}$$

dels

$$a_\sigma > \gamma. \tag{4}$$

Genom en hur liten förskjutning som helst af denna plana rymd parallellt med Z-axeln kunna vi erhålla en likadan omgifning ($D\,E\,F\,G$, fig. 2) i en annan därmed parallell rymd, hvari φ är kontinuerligt med afseende på $(x_1, \ldots x_n)$. (Detta i följd af vårt antagande om φ, § 15.) Är ε ett godtyckligt litet tal, så kunna vi således, om så behöfves, minska omgifningen $D\,E\,F\,G$, så att vi för två godtyckliga punkter B_1 och C_1 därinom hafva

$$|\varphi(B_1) - \varphi(C_1)| \leqq \varepsilon.$$

Genom förskjutning af detta $D\,E\,F\,G$ parallellt med Z-

axeln mellan rymderna $z = z_0 - \frac{\gamma}{2}$ och $z = z_0 + \frac{\gamma}{2}$ genereras en cylinder ($D_1 E_1 F_1 G_1 D_2 E_2 F_2 G_2$) med höjden γ och enligt (3) så beskaffad, att om en linje drages parallellt med Z-axeln från en godtycklig punkt på

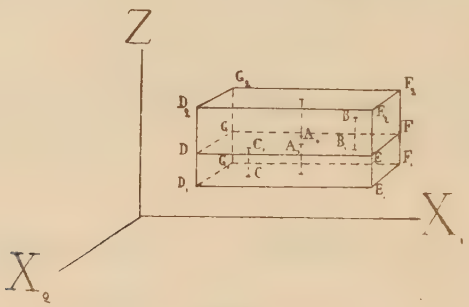

Fig. 2.

$D E F G$, denna linje träffar rymden (1) inom cylindern. Häraf inses med stöd af (4), att om två godtyckliga punkter B och C inom cylindern projicieras på $D E F G$ i B_1 och C_1, så är

$$|\varphi(B) - \varphi(B_1)| \leqq \sigma,$$

$$|\varphi(C) - \varphi(C_1)| \leqq \sigma.$$

Dessa olikheter gifva tillsammans med föregående

$$|\varphi(B) - \varphi(C)| \leqq 2\sigma + \varepsilon.$$

Huru litet än ε väljes, svarar däremot alltid en viss volym, inom hvilken ofvanstående likhet gäller. Men detta innebär enligt definitionen på oskillationen i en punkt samma sak som olikheten (2).

18. Emedan φ är en kontinuerlig funktion af z, är a_σ aldrig noll. Betrakta vi funktionen blott i de punkter, som tillhöra en godtycklig perfekt punktmängd,

så finnes inom hvarje område af denna punktmängd ett annat område, inom hvilket a_σ har sitt minimum positivt; ty funnes något område, inom hvilket a_σ i hvarje punkt hade sitt minimum noll, så vore enligt § 10 $a_\sigma = 0$ i vissa punkter.

Låt $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m, \ldots$ vara en serie aftagande positiva tal, som gå mot noll med växande m. Som vi nyss sett, finnes på hvarje perfekt punktmängd P ett område, inom hvilket a_{σ_1} har sitt minimum positivt. Inom detta kunna vi finna ett nytt område, där a_{σ_2} har sitt minimum positivt, inom detta ett, där a_{σ_3} har sitt minimum positivt o. s. v. Fortsätta vi på detta sätt, så få vi *åtminstone en gränspunkt*, i hvilken a_σ är positivt, huru litet vi än välja σ. En sådan gränspunkt tillhör punktmängden P, som antogs vara perfekt och således sluten. I denna punkt är enligt föregående paragraf oskillationen *noll* och funktionen således *kontinuerlig*. Som den perfekta punktmängden valdes fullkomligt godtyckligt, är härmed bevisadt, att $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$ och följaktligen

$$f(x_1, \ldots x_n) = \varphi(x_1, \ldots x_n, 0)$$

äro *punktuellt diskontinuerliga med afseende på hvarje perfekt punktmängd.*

Detta är ett *nödvändigt* villkor, för att en funktion skall vara representabel. Vi skola i det följande se, att det äfven är *tillräckligt.*

Tillräckliga villkor.

19. Vi antaga nu, att funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ är *punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd,* och skola söka framställa en funktion $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$, som representerar $f(x_1, \ldots x_n)$.

20. För vår undersökning behöfva vi följande hjälpsats:

Låt funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ *inom ett område* Σ *vara representabel. Låt vidare* S *vara en kontinuerlig n-dimensional rymd, som ligger helt öfver* Σ (d. v. s. mot hvarje punkt $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots x_n = x_n^{(0)}, z = 0$ på Σ svarar en punkt $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots x_n = x_n^{(0)}, z = z_0 > 0$ på S). *Hafva vi en godtycklig kontinuerlig funktion* $\psi(x_1, \ldots x_n)$, *definierad på* S, *så kunna vi framställa en sådan funktion* $q(x_1, \ldots x_n, z)$, *som representerar* $f(x_1, \ldots x_n)$ *och dessutom på* S *uppfyller villkoret*

$$q(x_1, \ldots x_n, z) = \psi(x_1, \ldots x_n). \tag{1}$$

Bevis. Emedan funktionen är representabel, finnes en funktion $\varphi_1(x_1, \ldots x_n, z)$, som är kontinuerlig för $z > 0$, kontinuerlig med afseende på z för $z = 0$ och som uppfyller villkoret

$$\varphi_1(x_1, \ldots x_n, 0) = f(x_1, \ldots x_n).$$

Som både φ_1 och ψ äro kontinuerliga på S, gäller detta äfven om deras skillnad

$$\psi(x_1, \ldots x_n) - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z).$$

Vi kunna nu lätt bilda en sådan kontinuerlig funktion $\varphi_2(x_1, \ldots x_n, z)$, som på S antager samma värden som $\psi - \varphi_1$ och som försvinner öfverallt på Σ. (Detta kan t. ex. ske genom att låta φ_2 variera lineart med afseende på z mellan Σ och S.) Sätta vi

$$q(x_1, \ldots x_n, z) = \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z) + \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z),$$

så synes omedelbart, att q så väl uppfyller villkoret (1) som representerar f.

21. Vi skola nu bevisa följande sats:

Är en funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ *representabel inom ett område hur nära som helst intill ett ändligt eller oändligt*

antal isolerade punkter, så är den representabel inom hela området.

Låt dessa isolerade punkter vara

$$A_m = (x_1^{(m)}, \ldots x_n^{(m)}) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Eftersom punkterna äro isolerade, kan det område Σ, där f är representabelt, indelas i sådana områden (Σ_m), att endast en punkt A_m kommer att ligga inom hvarje område och ingen punkt faller på begränsningen mellan några af dem. Från hvarje punkt på begränsningen till något Σ_m draga vi en perpendikel uppåt, d. v. s. en linje parallell och likriktad med positiva Z-axeln. Sammanfattningen af dessa linjer bildar en n-dimensional rymd S_0.

Öfver hvarje Σ_m lägga vi en n-dimensional konisk rymd med spetsen i A_m. Vi kunna t. ex. bilda dessa rymder så, att de satisfiera hvar sin likhet

$$[x_1 - x_1^{(m)}]^2 + [x_2 - x_2^{(m)}]^2 + \ldots + [x_n - x_n^{(m)}]^2 = k\, z^2;$$

där k är en positiv konstant. På hvar och en af de koniska rymderna må σ_m beteckna den del, som ligger mellan spetsen och skärningen med närmaste parti af S_0. Sammanfattningen af de olika σ_m bildar jämte vissa delar af S_0 en sammanhängande n-dimensional rymd, som må betecknas med S.

På S bilda vi en funktion ψ, hvilken är kontinuerlig i hvarje punkt, oberoende af z på de delar af S, som äfven tillhöra S_0, samt i hvarje punkt A_m antager värdet

$$f(A_m).$$

En sådan funktion kan bestämmas på oändligt många sätt. Vi kunna t. ex. gifva den ett konstant värde på de delar, som S har gemensamt med S_0, och på hvarje

σ_m låta den variera linearт längs generatriserna mellan begränsningen och A_m. Att denna funktion är kontinuerlig, inses lätt.

Om vi utesluta små omgifningar omkring punkterna $A_1, A_2, \ldots$, så kunna vi med stöd af föregående paragraf för återstoden af Σ finna en funktion $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$, som representerar $f(x_1, \ldots x_n)$ och på S antager samma värden som ψ. Sedan kunna vi från de uteslutna områdena utesluta ännu mindre omgifningar till punkterna A_m och för återstoden bestämma φ. Får härvid φ andra värden än förut på begränsningen till det område, där denna funktion först bestämdes, så behöfva vi blott tillägga en kontinuerlig funktion, som på begränsningen blir lika med skillnaden mellan de båda värdeföljderna och på S och Σ antager värdet *noll*. Sedan bestämma vi funktionen ännu närmare intill punkterna A_m o. s. v. Så få vi en funktion, som uppfyller de åstundade villkoren. Bilda vi på andra sidan om S en kontinuerlig fortsättning af φ, så inses omedelbart, att $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$ representerar $f(x_1, \ldots x_n)$ för hela Σ.

22. Vi antaga nu, att vi om funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ veta, att den är representabel öfverallt inom E utom på punktmängden P, som vi förutsätta sluten (i annat fall behöfva vi blott tillfoga dess gränspunkter). Emedan $P - P'$ blott består af isolerade punkter (§ 2) och funktionen är representabel utanför P, är den enligt föregående paragraf representabel för det område, som erhålles, om vi tillägga punkterna

$$P - P',$$

d. v. s. utanför P'. På samma sätt kunna vi till det område, där funktionen är representabel, lägga

$$P' - P'', \; P'' - P''', \ldots P^{m-1} - P^m, \ldots$$

Således är den representabel utanför P^m, hvilket ändligt värde vi än gifva åt m, följaktligen inom hela området utanför P^ω. När vi nu fått tillägga

$$P - P^\omega,$$

så visas analogt att vi äfven kunna tillägga

$$P^\omega - P^{2\omega},\ P^{2\omega} - P^{3\omega}, \ldots$$

Genom tillräckligt många operationer måste vi slutligen komma fram till att funktionen är representabel utanför ett sådant P^α, som är lika med P^Ω (jfr § 2). Vare sig P^Ω är noll eller perfekt, kunna vi uttala vårt resultat sålunda:

Är en funktion representabel inom $E - P$, så är den representabel inom $E - P^\Omega$.

23. Nu kunna vi erhålla följande sats:

Om en funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ inom ett visst område E är kontinuerlig på en sluten punktmängd P och representabel utanför denna, så är den representabel inom hela området E.

Bevis. Inom det $(n + 1)$-dimensionala kontinuet $(x_1, \ldots x_n, z)$ bestämma vi på följande sätt en n-dimensional rymd

$$(1) \qquad z = \chi(x_1, \ldots x_n).$$

I hvarje punkt af E göra vi χ = närmaste afståndet till P. Denna rymd sänker sig tydligen ned till E i hvarje punkt af P, hvaremot den har en ändlig höjd öfver hvarje punkt, som tillhör $E - P$. Vi skola nu se, att den är kontinuerlig. Gå vi utefter en rät linje i E, så varierar χ på sin höjd lika hastigt som linjens längd. Välja vi ε godtyckligt litet och omgifva en viss punkt i E med en n-dimensional sfär med radien $\frac{\varepsilon}{2}$, så kan följaktligen värdet på χ i ingen punkt på

någon radie afvika mer än $\frac{\varepsilon}{2}$ från värdet i medelpunkten. Således är oskillationen inom sfären $\leqq \varepsilon$, och χ är en kontinuerlig funktion.

Nu bestämma vi (§ 11) en kontinuerlig funktion $\psi(x_1, \ldots x_n)$, som på P antager samma värden som f. Tillordna vi till hvarje punkt $(x_1, \ldots x_n, \chi)$ på (1) funktionsvärdet $\psi(x_1, \ldots x_n)$, så blir tydligen ψ en på (1) definierad kontinuerlig funktion.

Som funktionen är representabel hur nära som helst intill hvarje punkt af P, kunna vi (§ 20) mellan rymderna (1) och E bestämma en funktion $\varphi(x_1, \ldots x_n, z)$, som representerar f för $E - P$ och som på (1) antager samma värden som ψ. Fortsätta vi denna funktion kontinuerligt uppåt, så representerar den $f(x_1, \ldots x_n)$ för hela E.

24. Föregående sats kan utsträckas vidare. Låt nämligen funktionen vara representabel öfverallt inom E utom på en punktmängd P. Enligt § 22 är funktionen representabel på

$$E - P^{\Omega}.$$

Är $P^{\Omega} \neq 0$, kan ej funktionen vara totalt diskontinuerlig med afseende på P^{Ω} (§ 19). Det finnes således en punktmängd $P_1 < P^{\Omega}$ så beskaffad, att funktionen är diskontinuerlig på densamma, men på $P - P_1$ kontinuerlig med afseende på P. Vi skola nu medräkna till P dess gränspunkter. Då är möjligen $P_1 = P$. Men i annat fall komma vi ett steg längre genom att i likhet med nyss sluta, att funktionen är representabel inom hvarje slutet område, huru nära som helst intill P_1, d. v. s. på

$$E - P_1$$

och

$$E - P_1^{\Omega}.$$

Analogt bilda vi en följd slutna punktmängder P_2 på P_1^{Ω}, P_3 på $P_2^{\Omega}, \ldots P_m$ på $P_{m-1}^{\Omega}, \ldots$ Funktionen är representabel på hvarje

$$E - P_m^{\Omega}.$$

Här är tydligen alltid

$$P_{m+1} \leqq P_m.$$

Låt P_ω vara sammanfattningen af de punkter, som äro gemensamma för hvarje P_m. (P_ω kan naturligtvis, liksom P_m från och med något visst m, vara noll.) Hvarje punkt, som ej tillhör P_ω, faller också utanför ett visst P_m och tillhör följaktligen det område, där funktionen är representabel. Funktionen är således representabel utanför P_ω. Vi kunna nu fortgå och analogt bilda $P_{\omega+1}, P_{\omega+2}, \ldots P_{2\omega}, \ldots P_\alpha$, utanför hvilka funktionen är representabel.

Häraf synes, att *om en funktion är representabel på $E - P$ och det finnes ett sådant α, tillhörande första eller andra talklassen, att vi hafva*

$$P_\alpha = 0,$$

så är funktionen representabel inom hela E.

Är intet P_α noll, så finnes likväl enligt § 4 något α, för hvilket vi hafva

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \ldots = P_{\Omega}.$$

Vi få häraf följande sats:

Är en funktion representabel på $E - P$, så är den representabel på $E - P_{\Omega}$.

25. För att fullständigt komma åt det tillräckliga villkoret för att en funktion är representabel, skola vi i denna och följande paragrafer bevisa ett par hjälpsatser.

Om oskillationen af en funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ *i hvarje punkt inom ett slutet område* E *är* $\leqq \lambda$ *och om* σ *är ett godtyckligt tal* $> \lambda$, *så kan* f *uppdelas i*

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots x_n) = g(x_1, \ldots x_n) + \psi(x_1, \ldots x_n),$$

där g *är en kontinuerlig funktion och* ψ *i hvarje punkt uppfyller villkoret*

$$(2) \qquad 0 \leqq \psi(x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma.$$

Bevis. Emedan oskillationen i en godtycklig punkt A är $< \sigma$, kan A omgifvas symmetriskt med en kub i n dimensioner, inom hvilken oskillationen ej öfverstiger σ. Låt a vara den största sida, en sådan kub kan erhålla. Som lätt inses, är a, betraktadt som funktion af punkten A, kontinuerligt och aldrig noll. En sådan funktion kan ingenstädes inom ett *slutet* område hafva sitt minimum noll, utan minimet för hela området är ett från noll skildt tal ϱ. Vi innesluta nu E i ett system (eller flera, om E består af skilda delar) intill hvarandra gränsande kuber med sidan $\frac{\varrho}{2}$. I hvarje hörnpunkt A_m stöta högst 2^n kuber tillsammans. Inom sammanfattningen C_m af dessa kuber är oskillationen $\leqq \sigma$. Vi gifva g i denna hörnpunkt det minsta värde g_m, som f antager inom C_m.

Inom en viss kub

$$x_\nu^{(0)} \leqq x_\nu \leqq x_\nu^{(0)} + \frac{\varrho}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

är funktionen g hittills bestämd blott i hörnpunkterna. Vi bestämma den nu på de $2^n - 1$ stycken kantlinjerna

$$x_1^{(0)} \leqq x_1 \leqq x_1^{(0)} + \frac{\varrho}{2},$$

$$x_\nu = x_\nu^{(0)} + \varepsilon_\nu \cdot \frac{\varrho}{2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots n;\ \varepsilon_\nu = 0 \text{ eller } 1)$$

genom lineär variation mellan värdena i hörnpunkterna. Därefter får den variera lineärt längs hvarje linje $x_1 =$ konstant på hvar och en af ytorna

$$x_\mu^{(0)} \leqq x_\mu \leqq x_\mu^{(0)} + \frac{\varrho}{2} \qquad (\mu = 1, 2),$$

$$x_\nu = x_\nu^{(0)} + \varepsilon_\nu \cdot \frac{\varrho}{2} \qquad (\nu = 3, 4, \ldots n, \ \varepsilon_\nu = 0 \text{ eller } 1).$$

Sedan bestämma vi funktionen för de 3-dimensionala begränsningar, som äro parallella med X_1-, X_2- och X_3-axlarne, genom lineär variation parallellt med X_3-axeln, o. s. v. Fortsätta vi på detta sätt, så erhålles slutligen $g(x_1, \ldots x_n)$ för hela kuben. På samma sätt få vi g för öfriga kuber. Härvid komma värdena att stämma öfverens på begränsningarna mellan olika kuber, emedan värdeföljden på hvarje begränsning är entydigt bestämd genom de värden, g antager i dess hörnpunkter, och således oberoende af öfriga värden i en närgränsande kub. Kontinuitetsbeviset erbjuder inga svårigheter.

Vi sätta i enlighet med (1)

$$\psi(x_1, \ldots x_n) = f(x_1, \ldots x_n) - g(x_1, \ldots x_n). \tag{3}$$

Det återstår nu att visa, att ψ uppfyller villkoret (2). Låt g_{ν_1} vara det minsta och g_{ν_2} det största värde, g antager i hörnpunkterna till en viss kub. Enligt bildningslagen för g är i hvarje punkt inom kuben

$$g_{\nu_1} \leqq g \leqq g_{\nu_2}. \tag{4}$$

Inom hela C_{ν_1} är g_{ν_1} minimet för f och oskillationen ej större än σ, följaktligen maximet på sin höjd $g_{\nu_1} + \sigma$. Så mycket säkrare är inom ifrågavarande kub

$$f \leqq g_{\nu_1} + \sigma. \tag{5}$$

Likaledes inses, att vi inom samma kub hafva

$$f \geqq g_{\nu_2}. \tag{6}$$

Olikheterna (4) — (6) gifva i förening med (3)

$$0 \leqq \psi(x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma.$$

Detta gäller inom hvarje kub, och härmed är satsen bevisad.

26. Denna sats kan utsträckas så, att den gäller för funktioner, definierade blott på en sluten punktmängd P inom ett område E. Enligt § 11 kunna vi nämligen inom E finna en kontinuerlig funktion, som på P antager de gifna värdena. Denna funktion uppdela vi enligt föregående paragraf.

27. *Om en funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ är punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd och om σ är ett godtyckligt positivt tal, så kan funktionen uppdelas i två så beskaffade delar*

$$f(x_1, \ldots x_n) = f_0(x_1, \ldots x_n) + \psi(x_1, \ldots x_n),$$

att f_0 är representabelt och

$$0 \leqq \psi(x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma.$$

Bevis. Låt P vara den punktmängd inom området E, på hvilken oskillationen är $\geqq \lambda$, då λ ligger mellan 0 och σ. Denna punktmängd är sluten (§§ 7, 9) och saledes $P \geqq P^{\Omega}$. Låt vidare P_1 vara den punktmängd inom P^{Ω}, på hvilken *oskillationen med afseende på* P^{Ω} är $\geqq \lambda$. Analogt bilda vi P_2 på P_1^{Ω}, P_3 på P_2^{Ω} o. s. v. Sammanfattningen af de punkter, som äro gemensamma för alla P_m, blott m är ett ändligt helt tal, benämna vi P_ω. Likaså må för ett helt tal α af andra talklassen $P_{\alpha+1}$ vara den punktmängd på P_α^{Ω}, där oskillationen

med afseende på P_α är $\geqq \lambda$. Är $\alpha = \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu$, må P_α vara sammanfattningen af de punkter, som äro gemensamma för hvarje P_{α_ν}.

Hvarje P_α är en sluten punktmängd. Således är

$$P_\alpha \geqq P_\alpha^{\Omega} \geqq P_{\alpha+1}.$$

Men på senare stället måste likhetstecknet uteslutas, ty i annat fall vore i hvarje punkt på P_α^{Ω} oskillationen $\geqq \lambda$, d. v. s. funktionen vore totalt diskontinuerlig på en perfekt punktmängd. Vi hafva följaktligen, så snart P_α ej är noll,

$$P_\alpha > P_{\alpha+1}.$$

Vidare veta vi, att de isolerade punkterna i ett P_α saknas i P_α^{Ω} och således i $P_{\alpha+1}$. Med stöd af § 4 inses nu, att det finnes ett visst α, för hvilket P_α försvinner. Ty det andra alternativet, $P_\alpha = P_{\alpha+1} = \ldots$, är oförenligt med nyss härledda olikhet.

Vi uppdela nu området E i punktmängderna

$$E - P,\ P - P^{\Omega},\ P^{\Omega} - P_1,\ P_1 - P_1^{\Omega}, \ldots$$

$$P_{\alpha'}^{\Omega} - P_{\alpha'+1},\ P_{\alpha'+1} - P_{\alpha'+1}^{\Omega}, \ldots (\alpha' < \alpha).$$

För hvarje slutet område inom $E - P$, huru nära intill P det än må sträcka sig, d. v. s. för hela $E - P$ kunna vi (§ 25) göra f_0 kontinuerligt och

$$0 \leqq \psi \leqq \sigma,$$

samt på $P - P^{\Omega}$

$$f_0 = f,\ \psi = 0.$$

Härvid blir f_0 representabelt på $E - P^{\Omega}$ (§ 22). På samma sätt bestämma vi (§ 26) f_0 och ψ på $P^{\Omega} - P_1^{\Omega}$ o. s. v.,

på hvarje $P_{\alpha'}^{\Omega} - P_{\alpha'+1}^{\Omega}$ så, att vi på $P_{\alpha'}^{\Omega} - P_{\alpha'+1}$ få f_0 kontinuerligt och

$$0 \leqq \psi' \leqq \sigma$$

samt på $P_{\alpha'+1} - P_{\alpha'+1}^{\Omega}$

$$f_0 = f, \quad \psi' = 0.$$

Inom $E - P$ är funktionen $f_0(x_1, \ldots x_n)$ representabel. Enligt § 22 få vi till detta område lägga $P - P^{\Omega}$, och enligt § 23 hvarje sluten del af $P^{\Omega} - P_1$, huru nära intill P_1 den än må sträcka sig, således hela $P^{\Omega} - P_1$. Analogt inses, att funktionen är representabel utanför P_2, $P_3, \ldots P_m$, hvilket värde m än må hafva, således utanför P_ω. Genom att fortsätta på detta sätt komma vi slutligen till att funktionen är representabel för hela E. Likaledes inom hela E är

$$0 \leqq \psi(x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma.$$

28. Vi komma nu till hufvudfrågan i detta kapitel: *Hvad är det tillräckliga villkoret för att en funktion* $f(x_1, \ldots x_n)$ *skall vara representabel?*

Låt $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_m, \ldots$ vara en serie aftagande positiva tal, som gå mot noll med växande m. Vi uppdela f i

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots x_n) = f_0(x_1, \ldots x_n) + \psi(x_1, \ldots x_n)$$

så, att f_0 är representabelt och

$$0 \leqq \psi(x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma_0.$$

Vidare uppdela vi ψ i

$$(x_1, \ldots x_n) = f_1(x_1, \ldots x_n) + \psi_1(x_1, \ldots x_n)$$

så, att f_1 är representabelt och

$$0 \leqq \psi_1 (x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma_1 .$$

Nu fortsätta vi och bilda

$$\psi_1 (x_1, \ldots x_n) - f_2 (x_1, \ldots x_n) + \psi_2 (x_1, \ldots x_n),$$

där f_2 är representabelt och ψ_2 uppfyller villkoret

$$0 \leqq \psi_2 (x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma_2$$

o. s. v. Generellt erhålla vi

$$\psi_{\mu-1} (x_1, \ldots x_n) - f_\mu (x_1, \ldots x_n) + \psi_\mu (x_1, \ldots x_n),$$

där f_μ är representabelt och

$$0 \leqq \psi_\mu (x_1, \ldots x_n) \leqq \sigma_\mu .$$

Som σ_μ går mot noll med växande μ, gäller detta således äfven om ψ_μ. Genom att successivt insätta uttrycken på olika ψ_μ i (1) erhålla vi

$$f (x_1, \ldots x_n) = \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu (x_1, \ldots x_n) + \psi_m (x_1, \ldots x_n).$$

Emedan resttermen ψ_m här går mot noll, kunna vi ersätta denna likhet med

$$f (x_1, \ldots x_n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu (x_1, \ldots x_n).$$

Hvarje f_μ är representabelt, d. v. s. vi kunna bestämma en funktion $\varphi_\mu (x_1, \ldots x_n, z)$, som representerar f_μ. I de metoder, vi användt, finnes intet hinder för att bestämma φ_μ så, att det ligger inom samma gränser som f_μ. Göra vi det, så är tydligen

$$\varphi (x_1, \ldots x_n, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi_\mu (x_1, \ldots x_n, z)$$

konvergent och representerar $f (x_1, \ldots x_n)$.

Det enda villkor, som vi pålade funktionen f, var att den skulle vara punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd. Vi se således, att detta villkor äfven är *tillräckligt*, för att funktionen skall vara representabel. Sammanställa vi detta resultat med hvad vi funnit i § 18, så kunna vi säga:

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att en funktion skall vara representabel, är att den är punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd.

29. Är funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd, kunna vi således (§ 14) framställa den som gränsvärde till en serie kontinuerliga funktioner. Vi skola nu visa, att vi för hvarje ändligt område kunna ersätta dessa kontinuerliga funktioner med polynom.

Enligt en sats, som Weierstrass härledt för funktioner af en variabel[1]) och som lätt kan utvidgas till

[1]) En enkel framställning af ifrågavarande sats finnes af Lebesgue i en uppsats Sur l'approximation des fonctions (Bulletin des sciences mathématiques, nov. 1898). Denna sats kan på följande sätt generaliseras till funktioner af flera variabler.

Vi antaga, att satsen gäller för $(n-1)$ variabler, och skola bevisa den för n variabler. Låt funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ vara gifven och kontinuerlig inom och på begränsningen af ett ändligt område E. Vi omgifva E med en kub C och definiera funktionen inom återstoden af C så, att den öfverallt blir kontinuerlig. Är ε ett godtyckligt litet tal, så kan liksom i § 25 ett sådant ϱ erhållas, att om vi uppdela C i kuber med ϱ till sida, så blir oskillationen inom hvarje sådan kub $< \frac{\varepsilon}{6}$. Vi lägga nu ett system ekvidistanta, mot X_1-axeln vinkelräta $(n-1)$-dimensionala plana rymder S_ν på afståndet ϱ från hvarandra. På tvenne konsekutiva S_ν är således, om $x_1^{(\nu)}$ är värdet af x_1 på S_ν,

$$(1) \qquad \left| f(x_1^{(\nu)} + \varrho, x_2, \ldots x_n) - f(x_1^{(\nu)}, x_2, \ldots x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

På hvarje S_ν är $f(x_1, \ldots x_n)$ en kontinuerlig funktion af $(n-1)$

funktioner af flera variabler, kan en funktion, som är kontinuerlig inom och på begränsningen af ett visst

---

variabler. Följaktligen finnes ett sådant polynom $X_\nu(x_2, \ldots x_n)$, som för hela S_ν uppfyller villkoret

$$(2) \qquad \left| f(x_1^{(\nu)}, x_2, \ldots x_n) - X_\nu(x_2, \ldots x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Likaledes erhålla vi på $S_{\nu+1}$

$$\left| f(x_1^{(\nu)} + \varrho, x_2, \ldots x_n) - X_{\nu+1}(x_2, \ldots x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Dessa båda olikheter gifva i förening med (1)

$$(3) \qquad \left| X_{\nu+1}, (x_2, \ldots x_n) - X_\nu(x_2, \ldots x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Som endast ett ändligt antal S_ν kunna läggas inom C, förekomma X_ν blott till ändligt antal, och deras gradtal kan ej gå mot oändligheten. Vi kunna således sätta

$$X_\nu(x_2, \ldots x_n) = \overline{X}(x_1^{(\nu)}, x_2, \ldots x_n),$$

där $\overline{X}$ är ett polynom i $(x_2, \ldots x_n)$, hvars koefficienter äro funktioner af x_1, definierade på de olika S_ν. Dessa koefficienter definiera vi nu mellan tvenne närbelägna S_ν genom lineär variation i x_1. Härigenom få vi funktionen $\overline{X}(x_1, \ldots x_n)$ definierad för hela C. Låt $A = (x_1, \ldots x_n)$ vara en godtycklig punkt mellan S_ν och $S_{\nu+1}$. Enligt sin bildningslag måste $\overline{X}$ i A antaga ett värde, som ligger mellan dess värde på S_ν och $S_{\nu+1}$ för samma $(x_2, \ldots x_n)$. Vi hafva således med hänsyn till (3)

$$\left| \overline{X}(x_1, \ldots x_n) - X_\nu(x_2, \ldots x_n) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Emedan rymderna S_ν lagts tillräckligt tätt, är för punkten A

$$\left| f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f(x_1^{(\nu)}, x_2, \ldots x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

De båda sista olikheterna gifva tillsammans med (2)

$$\left| f(x_1, \ldots x_n) - \overline{X}(x_1, \ldots x_n) \right| < \frac{5\varepsilon}{6}.$$

ändligt område, för detta område med godtycklig noggrannhet ersättas med ett polynom.

Är $f(x_1, \ldots x_n)$ en representabel funktion, så finnas sådana kontinuerliga funktioner $f_m(x_1, \ldots x_n)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, att vi hafva

$$\lim_{m = \infty} f_m(x_1, \ldots x_n) = f(x_1, \ldots x_n).$$

Är $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ en serie positiva tal, som gå mot noll, så kunna vi bestämma en serie polynom X_m, som för hela E uppfylla hvar sin olikhet

$$|X_m - f_m(x_1, \ldots x_n)| < \varepsilon_m.$$

Polynomen X_m hafva således samma gränsvärde som f_m, och vi kunna uttala satsen i föregående paragraf sålunda:

Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att en funktion inom ett ändligt område skall kunna framställas som gränsvärde till (eller en summa af) polynom, är att den är punktuellt diskontinuerlig med afseende på hvarje perfekt punktmängd.

Emedan koefficienterna i $\overline{X}$ äro kontinuerliga funktioner af x_1, kunna vi tillnärmelsevis ersätta dem med polynom, hvarvid $\overline{X}$ öfvergår i ett polynom $X(x_1, \ldots x_n)$. Som ifrågavarande koefficienter förekomma i ändligt antal, kunna vi härvid åstadkomma, att villkoret

$$\left|X(x_1, \ldots x_n) - \overline{X}(x_1, \ldots x_n)\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

uppfylles. Af denna olikhet i förening med föregående erhålles

$$|f(x_1, \ldots x_n) - X(x_1, \ldots x_n)| < \varepsilon.$$

Härmed är satsen bevisad.